

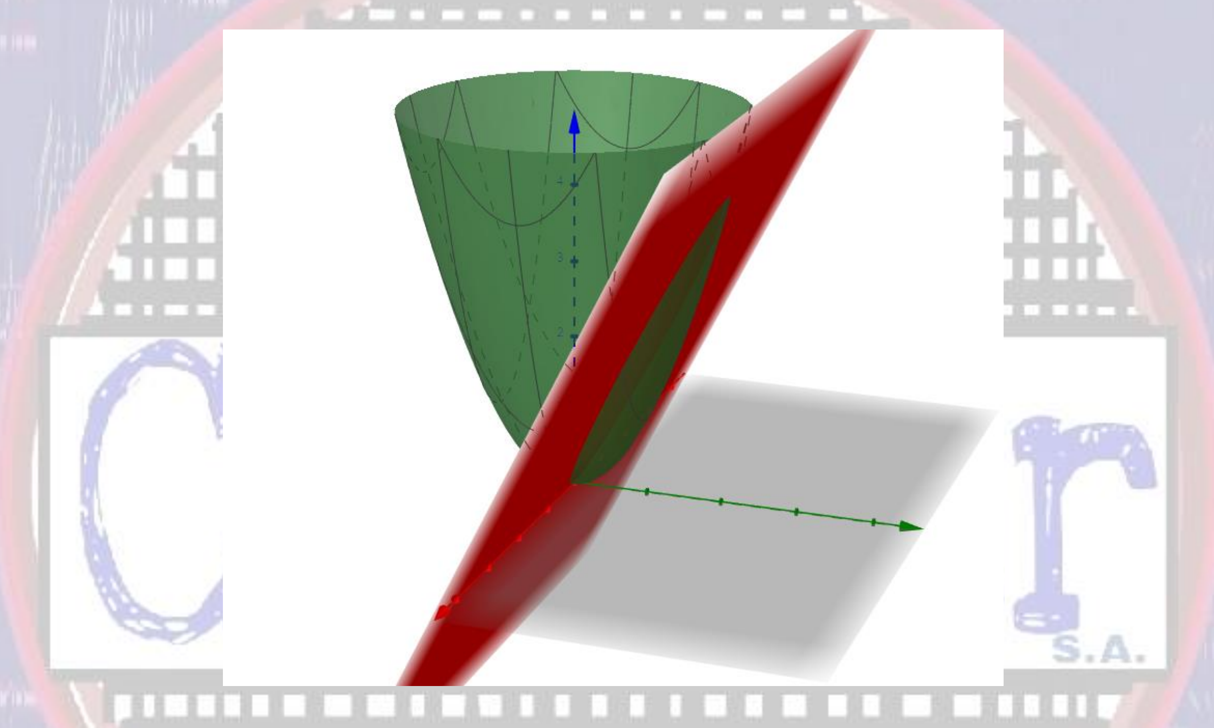
EJERCICIOS DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

1) Mediante una integral doble hallar el volumen del sólido limitado por las superficies:

S_1: $z=x^2+y^2$; S_2: $z=2y$

Solución:

i. Graficando las superficies en R^3:



ii. Hallando la proyección sobre el eje xy: (Haciendo $z_1=z_2$)

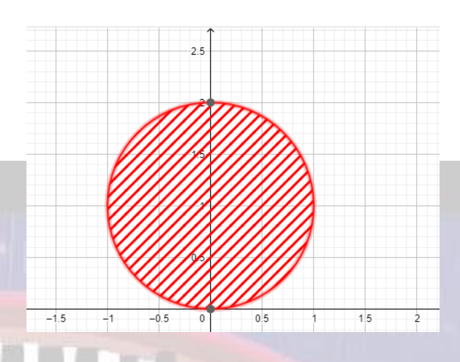
$$x^2+y^2=2y$$

$$x^2+y^2-2y=0$$

$$x^2+(y-1)^2=1$$

iii. Gráfica de la región en xy:





Particularidad: $y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$

Entonces la región en general queda descrita como:

$$R = \left\{(x, y, z) \in R^3 / -1 \leq x \leq 1 \wedge 1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1 - x^2} \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 2y\right\}$$

Por lo tanto la integral queda expresada como:

$$\iiint_R dV = \int_{-1}^{1} \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} 2y - x^2 + y^2 dydx$$

Para resolver usamos coordenadas polares:

$$Transformación \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$r^2 = 2r \operatorname{sen}\theta$$

$$r = 0 \vee r = 2\operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore 0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} 2y - x^2 + y^2 dydx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\operatorname{sen}\theta} (2r\operatorname{sen}\theta - r^2)\, rdrd\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\operatorname{sen}\theta} (2r^2\operatorname{sen}\theta - r^3)\, drd\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{2\operatorname{sen}\theta\, r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \Big|_{0}^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta$$



$$= \int_0^{\pi} \frac{16\, sen^4\theta}{3} - \frac{16 sen^4\theta}{4} d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} sen^4\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \frac{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8} d\theta = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} sen\, 2\theta + \frac{1}{32} sen\, 2\theta \int_0^{\pi} \right)\right] = \frac{\pi}{2} unidades^3$$

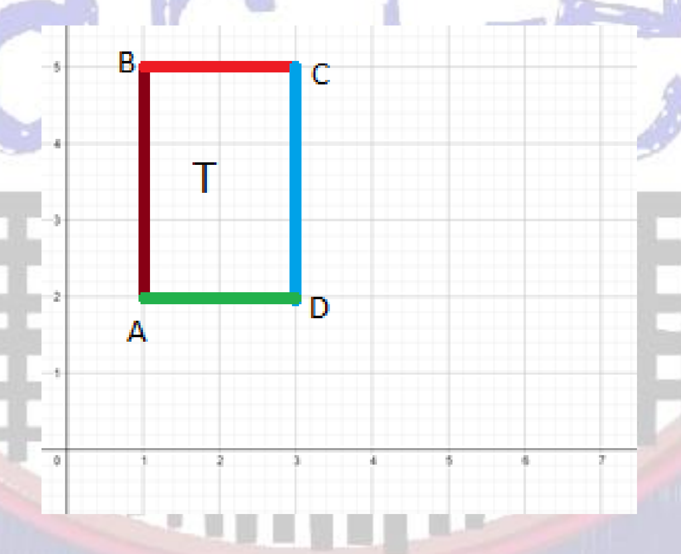
2) **Sea T un rectángulo cuyos vértices son (1,2), (1,5), (3,2) y (3,5) en el plano uv y sea R la imagen de "T" en el plano xy; la transformación jacobiana es**

$$\boldsymbol{J(u,v) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}$$

a) Graficar la región "R"
b) Hallar el área de la región "R"

Solución:

a) Graficando "T" en las coordenadas uv:



Se sabe que: $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Como dato:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

- $\frac{\partial x}{\partial u} = 2$



- $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$
- $\frac{\partial y}{\partial u} = -1$
- $\frac{\partial y}{\partial v} = 3$

Conclusión:

$$Transformación \begin{cases} x = 2u + v \\ y = -u + 3v \end{cases}$$

A partir de las ecuaciones de transformación convertiremos las rectas (u,v) a (x,y)

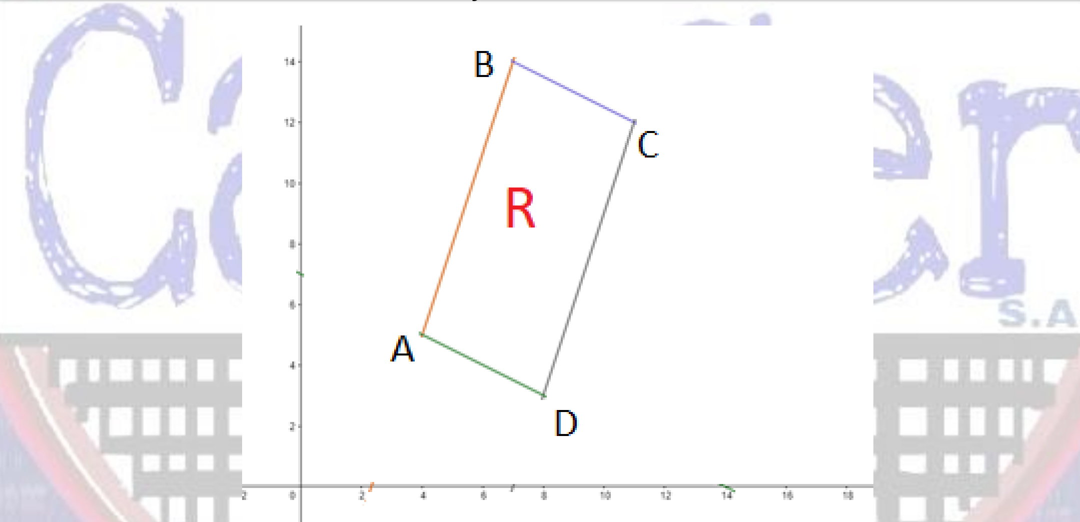
AB: u=1→$\frac{3x-y}{7} = 1$

BC: v=5→$\frac{x+2y}{7} = 5$

CD: u=3→$\frac{3x-y}{7} = 3$

DA:v=2→$\frac{x+2y}{7} = 2$

Graficando "R" en las coordenadas xy:



b) Hallando el área de la región:

$$T = \{(u, v) \in R^2 / 1 \leq u \leq 3 \wedge 2 \leq v \leq 5\}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\iint_R dA = \int_1^3 \int_2^5 7dvdu$$

$$= \int_1^3 [7v \int_2^5]du$$

$$= [21u \int_1^3] = 42\ unidades^2$$



3) Mediante una integral doble hallar el área de la elipse de ecuación:

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}}=\mathbf{1}$$

Solución:

i. Analizando la función:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$y_1=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \wedge \quad y_2=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

ii. Graficando la región:

$$D=\left\{(x,y)\in R^2/-a\leq x\leq a\wedge -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leq y\leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}$$



Calculando el área:

$$\iint_D dA = \int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dydx = \int_{-a}^{a}[y\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}]dx$$

$$= \int_{-a}^{a} 2\,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx \ldots (I)$$

$$Haciendo: x = a\,sen\theta \rightarrow dx = a\,cos\theta d\theta \ldots (II)$$

$$* \, x^2 = a^2\,sen^2\theta \ldots (III)$$

$$* \, x = a \rightarrow a = a\,sen\theta$$

$$sen\,\theta = 1 \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$* \, x = -a \rightarrow \ \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$(III)\ y\ (II)\ en\ (I): \frac{2b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\,cos^2\theta d\theta$$

$$= 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\ d\theta = 2ab[(\frac{sen\,2\theta}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}) + (\frac{\theta}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}})] = ab\pi\ unidades^2$$



Car Ger

S.A.